7/11/16

$\exists$? σ : συμμετρικές $\wedge$ αντισυμμετρικές $\subseteq \Delta$ (υποσύνολα της διαγωνίου)

Θεώρημα: i) Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο E, τότε η $E/\sim$ αποτελεί μια διαμέριση του E.

ii) Αν Δ: διαμέριση του E, τότε $\exists$ σ: σχέση ισοδυναμίας στο E, τέτοια ώστε $E/\sigma = \mathcal{D}$

Απόδειξη: Στο σύνολο E ορίζω τη σχέση σ με $x\sigma y$: $\exists \Delta \in \mathcal{D} : x, y \in \Delta$

Θα αποδείξω ότι είναι σχέση ισοδυναμίας

(i) <u>ανακλαστική</u>: Για $x \in E$: επειδή $\mathcal{D}$ διαμέριση του E $\exists \Delta \in \mathcal{D}$ με $x \in \Delta$

Επομένως θα είναι: $(x,x) \in \Delta \to x\sigma x$

δηλ. $(x,x) \in \sigma \ \forall x \in E$

(ii) <u>συμμετρική</u>: Ας είναι $(x,y) \in \sigma$, ώστε $\exists \Delta \in \mathcal{D} : (x,y) \in \Delta$

άρα $y, x \in \Delta$

$y, x \in \sigma$

άρα $\sim$ συμμετρική

(iii) <u>μεταβατική</u>: Για $(x,y), (y,z) \in \sigma$

$(x,y) \in \sigma \Rightarrow \exists \Delta \in \mathcal{D} : (x,y) \in \Delta$

$(y,z) \in \sigma \Rightarrow \exists \Delta' \in \mathcal{D} : (y,z) \in \Delta'$

Επομένως $\left.\begin{array}{l} y \in \Delta \\ y \in \Delta' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \equiv \Delta'$

$\Delta \in \mathcal{D}$ άρα μεταβατική κ σχ.

Θα αποδείξω ότι $E/\sigma = \mathcal{D}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\mathcal{D} \subseteq E/\sigma$

[E/σ διαμέριση - πρόταση]

Ας είναι $\Delta \in \mathcal{D}$. Αρκεί να αποδείξω ότι $\Delta \in E/\sigma$

Επειδή $\Delta \in \mathcal{D}$ είναι $\Delta \neq \emptyset$

άρα $\exists \alpha \in \Delta$.

Θα αποδείξω ότι $\Delta = \kappa\lambda_\sigma(\alpha)$

Πράγματι, για $x \in \Delta$ είναι

$x, \alpha \in \Delta \Rightarrow (x,\alpha) \in \sigma \Rightarrow x \in \kappa\lambda_\sigma(\alpha)$

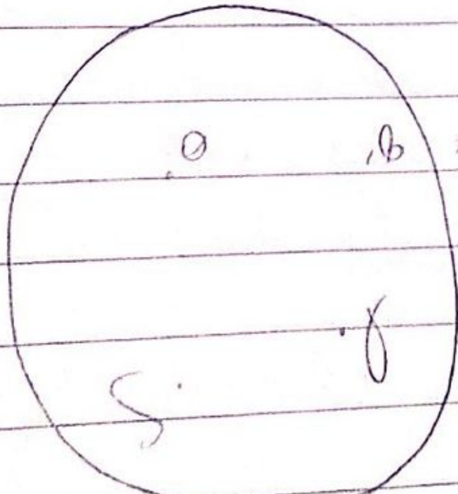
άρα $\Delta \subseteq \kappa\lambda_\sigma(\alpha)$ (I)

Επίσης, αν $y \in \kappa\lambda_\sigma(\alpha)$ τότε $y\sigma\alpha \Rightarrow y, \alpha \in \Delta$ $(\Delta \in \mathcal{D})$

$\kappa\lambda_\sigma(\alpha) \subseteq \Delta$ (II)

Από (I) και (II) έπεται ότι $\Delta = \kappa\lambda_\sigma(\alpha)$

$E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$



$= \{(\alpha,\alpha), (\gamma,\delta), (\beta,\delta), (\delta,\beta), (\delta,\delta), (\beta,\beta$

$\mathcal{D} = \{\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\}$ η πιο μικρή διαμέριση

και η πιο μεγάλη προέρχεται από τη διαμέριση

του συνόλου

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζω

$\sigma_1 = \Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{Z}\}$

$\sigma_2 = \{(x,y)\ x-y = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$k=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow (x,x) \in \sigma \Rightarrow$

$\sigma_1 \subseteq \sigma_2$

$E/\sigma_1 = \{\{1\}, \{2\}, \ldots\ldots \{0\}, \{-1\}, \{2\} \ldots\}$

$E/\sigma_2 = \ldots\ldots$

$\kappa\lambda_\sigma(1) = \{2k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\kappa\lambda_\sigma(0) = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (σελ. 8 βιβλίο)

ΠΡΟΤΑΣΗ: σ σχέση στο E:

i) σ ανακλαστική: $\Delta \subseteq \sigma$

ii) σ συμμετρική: $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \sigma$

iii) σ μεταβατική: $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι η σ είναι ισοδυναμία στο Ε

Ε) $\begin{cases} \Delta \subseteq \sigma \\ \sigma = \sigma\circ\sigma^{-1} \end{cases}$ (σελ 278)

Λύση: σ ανακλαστική αφού $\Delta \subseteq \sigma$

Θα αποδείξω ότι η σ είναι συμμετρική

Ας είναι $(x,y)\in\sigma$

Αρκεί ν.δ.ο. $(y,x)\in\sigma$

Από την $\sigma=\sigma\circ\sigma^{-1}$. $(x,y)\in\sigma \Rightarrow (x,y)\in\sigma\circ\sigma^{-1}$

$\Rightarrow \exists z\in E: (x,z)\in\sigma^{-1} \wedge (z,y)\in\sigma$ (ορισμός σύνθεσης)

δηλ. $\exists z\in E: (z,x)\in\sigma \wedge (z,y)\in\sigma$

άρα $(z,x)\in\sigma$, $(y,z)\in\sigma^{-1}$

$\Rightarrow (y,x)\in\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma$

Άσκηση: Αν $\mathcal{T}=\{\sigma : \text{σχέση ισοδυναμίας στο } E\} \to \bigcap\mathcal{T}=\sigma$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο Ε

Λύση: i) σ^- ανακλαστική

$\forall\sigma\in\mathcal{T} : \Delta\in\sigma \to \Delta\in\bigcap\mathcal{T}$

ii) σ^- συμμετρική: αν $(x,y)\in\sigma \Rightarrow (x,y)\in\sigma\ \forall\sigma\in\mathcal{T}$

$\Rightarrow (y,x)\in\sigma\ \forall\sigma\in\mathcal{T}$

$\Rightarrow (y,x)\in\bigcap\mathcal{T}=\sigma^-$ άρα σ^- συμμετρική

iii) σ^- μεταβατική: Για $(x,y),(y,z)\in\sigma^-=\bigcap\mathcal{T}$

έχουμε: $(x,y),(y,z)\in\sigma\ \forall\sigma\in\mathcal{T}$

$\Rightarrow (x,z)\in\sigma\ \forall\sigma\in\mathcal{T} \Rightarrow (x,z)\in\bigcap\mathcal{T}=\sigma^{-1}$

$E = \mathbb{R}$

$\mathcal{C} = \{$ ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}\}$

$\bigcap \mathcal{C} \subseteq \Delta$

Λύσεις προηγούμενων ασκήσεων:

$\mathcal{C} = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ (-1, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \ldots (-10^{-7}, 10^{-7}) \right\}$

Παρατηρώ ότι $\forall n \in \mathbb{N}: \ -1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq (-1, 1)$$

Άρα $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \bigcup (-1, 1) = (-1, 1)$ (I)

Επίσης $(-1, 1) \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ (II)

Άρα $\boxed{\bigcup \mathcal{C} = (-1, 1)}$

Παρατηρώ ότι $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}$

άρα $0 \in \bigcap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \bigcap \mathcal{C}$

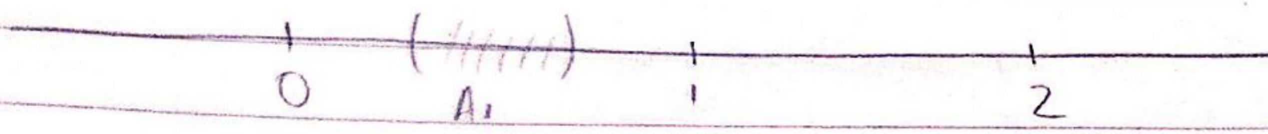
Θα αποδείξω ότι $\bigcap \mathcal{C} = \{0\}$. Υποθέτω ότι $\exists r > 0$ με $r \in \bigcap \mathcal{C}$

δηλ. $r \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε θα πρέπει $0 < r < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n < \frac{1}{r}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλ. το n είναι άνω φράγμα

$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n}{n+1}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$

Λύση: $A_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $A_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$, $A_3 = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{4}\right)$



$\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$

$\frac{1}{2} < r < 1$

$r < \frac{n}{n+1} \Rightarrow r(n+1) < n$

$rn + r < n$

$r < n(1-r)$

$\frac{r}{1-r} < n$